數學傳播　49卷4期, pp. 125-131

一道數學所入學測驗中的積分號取極限的問題

呂治鴻 · 黃靖雯

摘要: 本文旨在探討形如 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 nx^{n-1}f(x)dx$ 的相關問題, 方法多樣化, 涉及初等分析、實分析與機率理論等觀點。

一、前言

在指導學弟妹們準備數學研究所碩士班的過程中, 我 (指筆者呂治鴻, 下同) 注意到一道來自師大數學所於 110 年的高等微積分的有趣試題。在該測驗中的第八試題探問了下列的極限

$$\lim_{n\to\infty}\Big(n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx\Big).$$

這類極限問題常出現在分析學中, 一般用來測驗學生對於逐點收斂或均勻收斂概念的掌握。以本題爲例, 對應的函數列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 定義爲

$$f_n(x)=\frac{nx^n}{1+x^3}\quad \text{for } x\in[0,1].$$

由於 $f_n(1)=\frac{n}{2}\to\infty$, 函數列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在區間 $[0,1]$ 上甚至不具逐點收斂的極限函數。而僅能在區間 $[0,1)$ 上計算出逐點收斂的結果, 其極限爲

$$f_\infty(x)=0\quad \text{for } x\in[0,1).$$

可以透過初等分析中的經驗分析而知函數列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在半開半閉的區間 $[0,1)$ 上可以逐點收斂至 f_∞ 但無法均勻收斂至 f_∞。

基於興趣, 作者兩人經常於網路上討論數學問題。又因爲兩人在思路上經常表現出獨特的見解與看法, 顯示出數學美妙的殊途同歸。在這篇文章中, 作者兩人共提出六種截然不同的計算證明手法供衆多數學愛好者一同享受!

二、解法 1 (呂治鴻): 分部積分法後控制被積分函數

這個解法的基本精神在於透過積分而讓分母出現與 n 帶有相同次數的多項式而避免發散的情形。因此透過第一步直接計算便可發現

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x^3)}\Big|_0^1 + \frac{3}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+3}}{(1+x^3)^2}dx \\ &= \frac{1}{2(n+1)} + \frac{3}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+3}}{(1+x^3)^2}dx.\end{aligned}$$

此時改寫後的定積分就轉化爲一個容易估計的形式而得

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^{n+3}}{(1+x^3)^2}dx \le \int_0^1 x^{n+3}dx = \frac{1}{n+4}.$$

由此我們便對原題目得到如下的估計式

$$\frac{n}{2(n+1)} \le n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx \le \frac{n}{2(n+1)} + \frac{3n}{(n+1)(n+4)}.$$

容易看出

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{2(n+1)} + \frac{3n}{(n+1)(n+4)}\right].$$

因此透過夾擠定理便有

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx\right) = \frac{1}{2}.$$

計算完畢。

解法一表明本題只要具有初等分析的技巧與估算的精神便不難計算得此結果。

三、解法 2 (黃靖雯): 透過分母的特殊性來構造適當的估計

此解法的關鍵觀察是, 分母可以透過簡單的不等式合併爲一項來估計。具體來說, 由算術幾何不等式可知 $1+x^3 \ge 2x^{\frac{3}{2}}$, 其中 $x \in [0,1]$。那麼

$$\frac{1}{2}x^n \le \frac{x^n}{1+x^3} \le \frac{1}{2}x^{n-\frac{3}{2}} \quad \text{for } x \in [0,1].$$

同樣在 $[0,1]$ 上取定積分並乘以 n, 則有

$$\frac{n}{2(n+1)} = \frac{n}{2}\int_0^1 x^n dx \le n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx \le \frac{n}{2}\int_0^1 x^{n-\frac{3}{2}}dx = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n-\frac{1}{2}} = \frac{n}{2n-1}.$$

同樣由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$ 與夾擠定理而知

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx\right) = \frac{1}{2}.$$

此手法相當簡短, 但對這函數有精緻的觀察。

四、解法 3 (呂治鴻): 為了更加簡短而使用高等工具計算

事實上在初等分析中, 逐點收斂無法保證極限與積分號的互換, 但在許多分析中, 這樣的互換仍舊是成立的 — 這便是著名的控制收斂定理:

Lebesgue **控制收斂定理**: 設 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲定義在實數子集 E 上的 Lebesgue 可測函數列。若函數列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上逐點收斂至函數 f 且存在 $L^1(E)$-函數 g 使得 $|f_n(x)| \le g(x), x \in E$。則 $f \in \mathcal{L}^1(E)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

⊛ 上述結果對於 E 爲有界閉區間、f 爲 Riemann 可積函數可直接適用。然而, 本題有 $f_n(1) = \frac{n}{2} \to \infty$, 故不能直接地應用 Lebesgue 控制收斂定理。承解法一中的步驟可知

$$n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{3n}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+3}}{(1+x^3)^2}dx.$$

此時便可應用 Lebesgue 控制收斂定理而注意到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+3}}{(1+x^3)^2}dx = 0,$$

從而結合前述的等式能知

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3}dx\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

此結果運用了高等分析工具, 有效簡化中間瑣碎的估計過程, 能夠更直覺地獲得對應的極限結果。

五、解法 4 (黃靖雯) : 這個小學就發現的不等式能用用看嗎?

其實這道題目在前三個解法出現後基本上就可以告一段落了, 但過了幾天後, 我在閱讀科普書時注意到一個有趣的不等式

若 $a, b, c, d > 0$ 且 $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$。

靖雯經過一陣計算後發現, 中間項事實上可視爲一種分點公式的結果:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b}{b+d}\cdot\frac{a}{b} + \frac{d}{b+d}\cdot\frac{c}{d}.$$

於是我就依此向筆者黃靖雯提出一個挑戰: 妳能用這個不等式來做做這道題目嗎? 會產生這樣的想法完全是渾然天成的, 因爲在解法 2 中, 靖雯正是使用了算術幾何不等式化繁爲簡而達到

成功估算的目的。經過一陣嘗試後, 靖雯最終成功獲得以下的不等式: 取 $a = c = nx^n/2$、$b = 1$、$d = x^3$。由於 $0 < x \le 1$, 故必有

$$\frac{nx^n}{2} = \frac{nx^n/2}{1} \le \frac{nx^n}{1+x^3} \le \frac{nx^n/2}{x^3} = \frac{nx^{n-3}}{2} \quad \text{for } 0 < x \le 1 \text{ and } n \in \mathbb{N}.$$

那麼兩邊同取積分可以發現 (當然, 需有 $n \ge 3$):

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{n-3}}{2}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-2)} = \frac{1}{2}.$$

因此同樣由夾擠定理可獲得對應的極限結果。

六、解法 5 (呂治鴻): 邊界層與弱收斂

在我所研究的偏微分方程式理論中, 運用函數列進行弱收斂來分析函數行爲是典型的技巧。而 nx^{n-1} 的函數列及其相關的延伸便均帶有此性質, 因此可基於弱收斂的精神而爲這一般性的問題提出通用的方法, 此法可在更弱的條件下獲得一樣的成果。

定理: 函數列 $\{nx^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ 弱收斂到 δ_1, 其中 δ_1 爲在 $x = 1$ 處的 Dirac functional。此即對任意 $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^{n-1}f(x)dx = f(1).$$

事實上, 該定理之條件可進一步放寬至 f 爲 Riemann 可積函數, 而在 $x = 1$ 處連續。

證明 (只假定 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可積且在 $x = 1$ 處連續):

(1) 給定 $\varepsilon > 0$。由於 f 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可積, 故按定義 f 必然在 $[0,1]$ 上有界, 即存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \le M$, $x \in [0,1]$。

(2) 由於 f 在 $x = 1$ 處連續, 故存在 $0 < \delta < 1$ 使得 $x \in [\delta, 1]$ 滿足 $|f(x) - f(1)| < \varepsilon/2$。

(3) 由於 $\int_0^1 nx^{n-1}dx = 1$, 故觀察兩項之差可知

$$\Big|\int_0^1 nx^{n-1}f(x)dx - f(1)\Big| = \Big|\int_0^1 nx^{n-1}\big(f(x)-f(1)\big)dx\Big| \le \int_0^1 nx^{n-1}|f(x)-f(1)|dx$$
$$= \int_0^\delta nx^{n-1}|f(x)-f(1)|dx + \int_\delta^1 nx^{n-1}|f(x)-f(1)|dx := A + B.$$

(4) 對於 B 的估算可使用 f 的連續性而知

$$B < \int_\delta^1 nx^{n-1}\cdot\frac{\varepsilon}{2}dx < \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 nx^{n-1}dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

(5) 對於 A 可透過 f 的有界性而有

$$A \le \int_0^\delta nx^{n-1} \cdot 2M dx = 2M\delta^n.$$

(6) 由於 $\lim\limits_{n\to\infty} \delta^n = 0$, 故存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得當 $n > N$ 時有 $2M\delta^n < \varepsilon/2$。

(7) 綜合前述各點可知當 $n > N$ 時便有

$$\Big| \int_0^1 nx^{n-1} f(x)dx - f(1) \Big| \le A + B < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

證明完畢。

若假定 $f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$, 則可以使用分部積分法而得到一更簡潔的證明如下。

證明 (假定 $f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$): 因 f 在 $[0,1]$ 上連續地可導, 故使用分部積分法可知

$$\int_0^1 nx^{n-1} f(x)dx = f(1) - \int_0^1 x^n f'(x)dx.$$

由 f' 在 $[0,1]$ 上的連續性, 存在 $M > 0$ 使得對 $x \in [0,1]$ 均有 $|f'(x)| \le M$。容易知道

$$\Big| \int_0^1 x^n f'(x)dx \Big| \le M \int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1} \to 0 \text{ as } n \to \infty$$

因此運用夾擠定理 (或之前所使用的 Lebesgue 控制定理) 便有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{n-1} f(x)dx = f(1) - \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f'(x)dx = f(1).$$

證明完畢。

七、解法 6 (黃靖雯): 機率理論與 Portmanteau 定理

由於靖雯精熟機率理論, 因此在後續的討論中, 她注意到 nx^{n-1} 其實可以視爲 $\mathrm{Beta}(n,1)$ 分布的機率密度函數。從而本文所探討的極限可以在機率理論中視爲 $\mathbb{E}[f(X_n)]$ 的極限問題, 其中隨機變數列 X_n 服從 $\mathrm{Beta}(n,1)$。在一般的機率理論中, 有一個著名的 Portmanteau 定理敘述如下

Portmanteau **定理**: 隨機變數列 X_n 爲依分布收斂至隨機變數 X, 等價於對任何連續有界函數 f 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$。

運用這樣的定理, 我們只需要釐清累積分布函數的逐點極限即可。對每個 $n \in \mathbb{N}$, 記對應

的機率密度函數爲 $f_n(x) = nx^{n-1}$, 其中 $x \in [0,1]$。那麼累積分布函數爲

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le 0; \\ x^n & \text{if } 0 < x \le 1; \\ 1 & \text{if } x > 1. \end{cases}$$

明顯地, 其逐點極限爲 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1; \\ 1 & \text{if } x \ge 1. \end{cases}$ 這表明隨機變數列 X_n 依分布收斂至常數隨機變數 $X \equiv 1$。如此一來, 直接使用 Portmanteau 定理就會發現

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^{n-1} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(1)] = f(1).$$

證明完畢。

⊛ **註**: 常數隨機變數 c 的累積分布函數爲 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < c; \\ 1 & \text{if } x \ge c. \end{cases}$

八、習題

此處將筆者曾在過去各式測驗中相關的考題羅列於此供有興趣的讀者練習與參考。

1. (國立臺灣大學88年微積分轉學考 (B) 卷)
   Find the limit $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{ny^{n-1}}{1+2y} dy$.
2. (國立淸華大學 88 年數學組高等微積分)
   Let $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ defined by
   $$f_n(x) = nx(1-x^2)^n, \quad \forall\, n = 1,2,3,\ldots$$
   Compute $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ and $\int_0^1 \Big[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big] dx$.
3. (台灣聯合大學系統99年碩士班高等微積分)
   Assume that $f(x)$ is continuous on $[0,\infty)$ with $f(x) \to 1$ as $x \to \infty$ (note that in general $f(x)$ may not be differentiable). Evaluate the following limit
   $$\lim_{t\to 0^+} t \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x)dx$$
   and give your reasons.

九、結語

本文從一道簡單的入學試題出發, 嘗試從不同觀點探索同一問題的多種面向, 期盼藉由本文拋磚引玉, 引發讀者與同儕之間對數學問題的深入討論與交流。全文聚焦於定積分的極限問題, 羅列六種深淺不一的解法與證法: 簡單者如運用中學已熟知的不等式, 結合夾擠定理予以證明; 進階者則可借助 Lebesgue 控制收斂定理或機率論中的 Portmanteau 定理, 經由更精緻的分析方法取得嚴謹結果; 而弱收斂性則提供了一個精簡的語言表達數學現象。

從這些解法中亦可觀察到由具體走向抽象的數學發展脈絡: 具體的工具提供直觀且易於操作的方法, 惟其適用範圍通常受限; 抽象的工具則雖難以立即掌握, 卻具備廣泛而靈活的適用性。此外, 一個值得反思的面向是, 具體方法雖易於理解, 卻常需經過反覆試誤與係數調整以求精準; 反觀抽象理論架構既成, 則可直接導出結果而少需額外修飾。

—本文作者呂治鴻投稿時任職國立臺灣大學國家理論科學研究中心數學組, 黃靖雯投稿時任職於中央研究院統計科學研究所—